2015 年 10 月 2 日

船越紫記

結び目理論

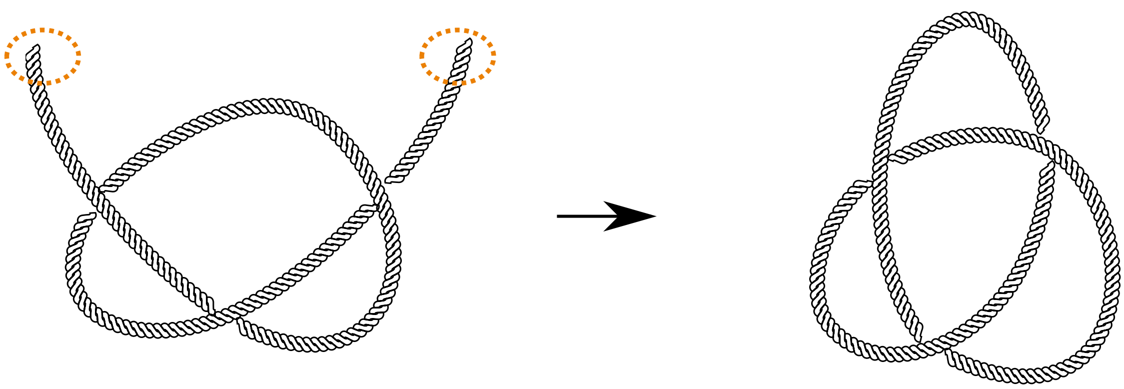
紐を結ぶという行為は、昔から人々の生活においてなくてはならないものでした。ビニール袋がない時代は風呂敷を結んでバッグのように使っていたし、接着剤やテープ類がない時代は紐で２つの物をくっつけていました。今でも普段の生活の中で、靴紐やご祝儀袋など、他にもたくさんの物を結んで生活の中で利用しています。

我々が実際に物を結んで使う場合、引っ張っても解けないような結び方や、一部を引っ張るだけで簡単に解くことができる結び方など、その目的によって結び方を変えて用います。他にも様々な結び方がありますが、その結んだコブの部分は結び方によってそれぞれ見た目の形も違い、解きやすさも異なります。

では、これらは本質的に何が異なっていてこのような違いが出てくるのでしょうか？

数学には、このような結び方の本質的な違いを研究する「結び目理論」と呼ばれる分野が存在します。
結び目理論では、紐がどのように結ばれているかを図に書いて図形の問題として捉え、その性質を調べていきます。

ただし日常で紐を使うときのように、「端」がある紐を使ってしまっては、どんな結び目でも何度かひもを動かすことで解くことが出来てしまいます。



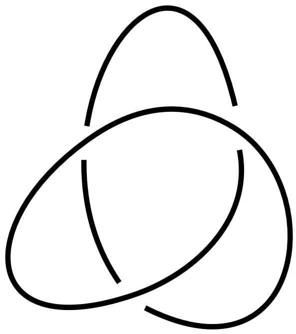
これではあまり面白くないので、紐の端同士をくっつけて、絡まった輪として考えることにします。これが、数学における「結び目」と呼ばれるものです。

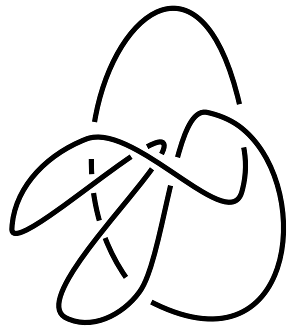
結び目理論では、絡まった輪（結び目）が解けるのか、解けない結び目は解ける結び目と何が違うのか、などを研究します。

結び目解消数

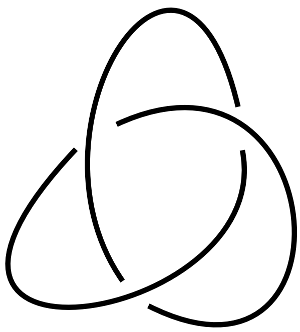
結び目はひもの形が少しくらい歪んでいても気にせず、ひもの長さも気にせずに、ひもの絡まり方のみに注目します。そのためにひもは自由に伸び縮みする柔らかい素材を用いていることにして、形を自由に変形できるものとして考えます。

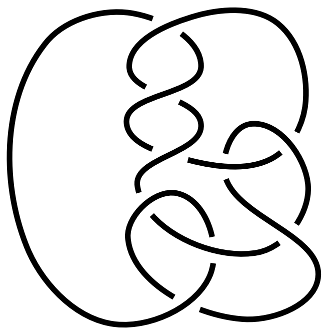
ここに２つの、見た目が違う結び目（①と②）があります。見た目は違うのですが、これらは紐を動かしていって、どちらも完全に解ほどいてしまうことができます。つまり①と②は見た目が違うだけで同じ結び目であるということになります。

①


②


さらに他の、見た目が違う２つの結び目（③と④）を見てみましょう。

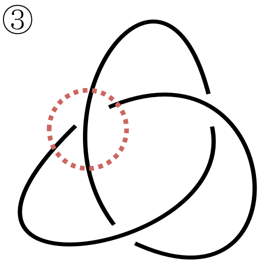
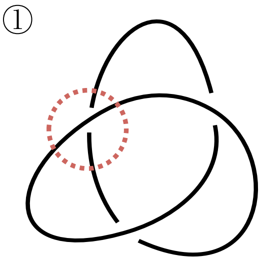
③


④


実はこれら（③と④）は、いくらひもを動かしても解けないということが知られています。①は解ける。③と④は解けない。なので、①と③は違う結び目、①と④も違う結び目であるということになります。

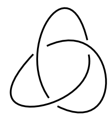
では単純に「違う」とは言っても、どの程度の違いがあるのでしょうか？
ぱっと見の印象としては、①と③は違うとはいえよく似ています。もしかしたら①と同じように③も解けるのではないかと一瞬思ってしまうくらいです。しかし①と④は見た目にも全然違うように見えます。さすがに④は見た目からして解けなさそうです。

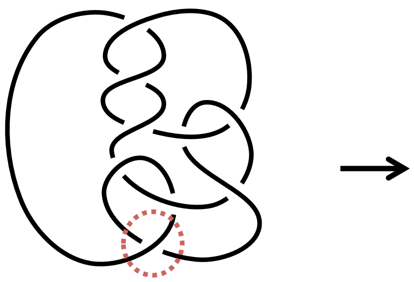
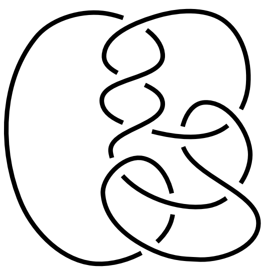
このような「ある結び目が、解ける結び目とどのくらい違うのか（どれだけ解ける結び目に近いのか)」という違いを正しく測るための尺度として、結び目解消数というものがあります。

③

①


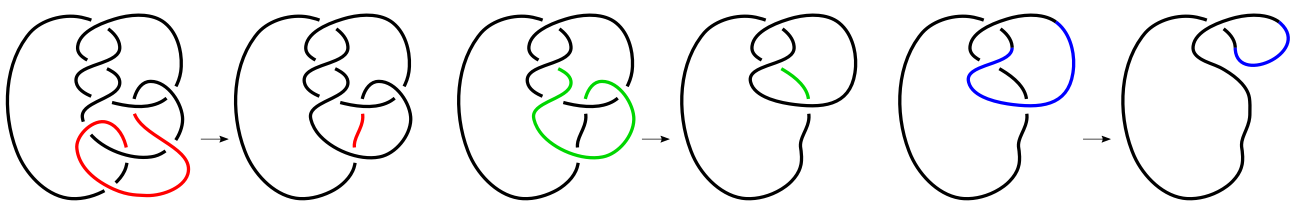
例えば、①と③はひもの形はほとんど同じですが、左上の部分だけはひもの交差している部分の上下が逆になっています。③の結び目の該当箇所のひもの交差の上下を逆にすると、①の結び目と同じものが得られ、解くことができるようになります。

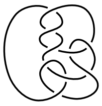
このように絡まってしまっている結び目でも、交差の上下を何箇所か変えてしまうことで、解けた結び目に変えることができます。
ここで、解けた結び目になるまでに何回上下を入れ替える必要があるのか、回数を数えましょう。やみくもに何回も上下の入れ替えをしても良いというわけではありません。適当にやると何の尺度にもならないので意味がないのです。なので、解けた結び目になるまでに必要な、交差の上下の入れ替えの最小回数を数えることにします。
この「解けた結び目になるまでに必要な、交差の上下の入れ替えの最小回数」のことを、結び目解消数といい、解けた結び目にどれだけ近いのかを表していると考えることができます。

③は一回で解けた結び目に変えることができたので、③  の結び目解消数は、１だということがわかります。
では④はどうでしょうか？

④

④’


見た目は複雑そうに見えますが、実は、図の丸で囲まれている部分１箇所の交差の上下を逆にするだけで、新しく得られた結び目④’ は解けた結び目になっているのです。実際、④’に描かれている結び目は、頑張って変形していくと解けることがわかります。



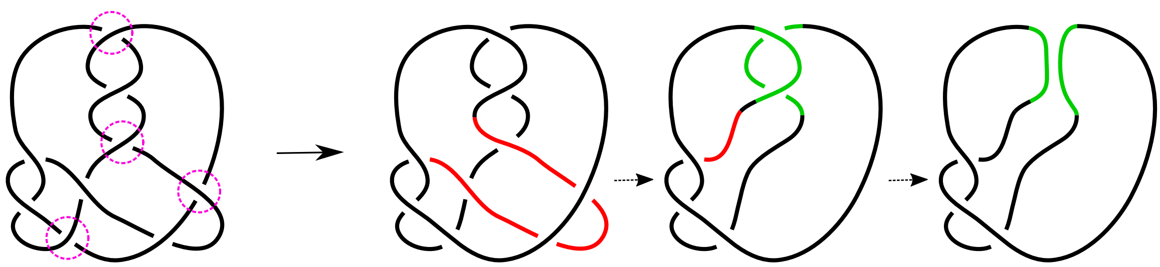
したがって③と同じで、④  の結び目解消数も１であることがわかります。

③と④の２つの結び目は、見た目は全然違うけれど（結び目解消数が同じなので）同じくらい解けた結び目に近いということがわかりました。

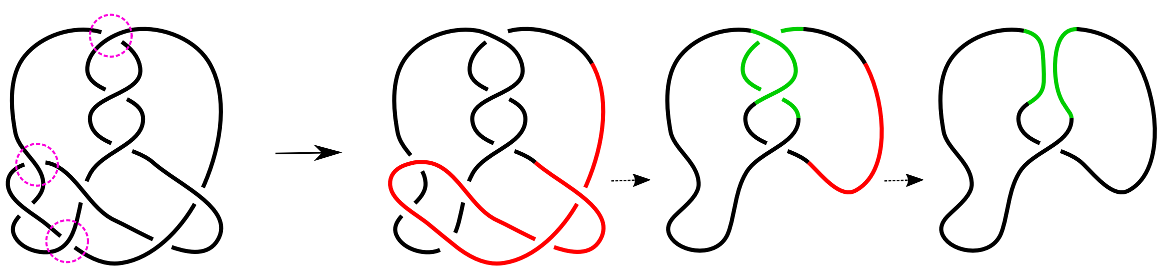
この結び目解消数という概念は感覚的には比較的理解しやすいのですが、実際に結び目解消数を求めるのは非常に困難であると言われています。「困難である」というのは、計算量が多いとかややこしくて大変などという意味ではなく、求め方がまだ解明されていないという意味です。

結び目解消数が既に知られている結び目もたくさんありますが、どんな結び目でも結び目解消数を求めることができるような公式などは実はありません。

手作業で交差の上下をいろいろ変えてみて地道に結び目解消数を探っても良いのですが、もし仮に４箇所で交差の上下を変えてみて解くことができたとしても、結び目解消数が４であるとは言い切れないので注意が必要です。

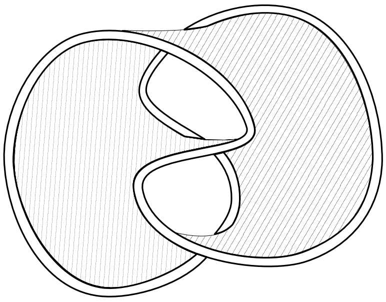


本当は３箇所でできる交点の組み合わせがあるかもしれないからです。



もやもや

全く制限をつけずに様々な種類の結び目を全部考えるのは大変なので、結び目によってどのような特徴があるのかを様々な視点から調べ、その特徴によってグループ分けをします。そしてそれぞれのグループに属する結び目に対して、それらの特徴を活かして結び目解消数などを研究するといったことがよくあります。



非常に多くの分け方がありますが、私の場合は結び目に膜を張って、その張られた膜の特徴によって結び目をグループ分けしています。
「結び目に膜を張る」というのは、針金を曲げて出来た結び目を石鹸液に浸してシャボン膜を張るようなイメージです。

しかしこの結び目に張られた膜の特徴を調べるためには、頭の中に４次元の空間を思い浮かべる必要があります。実は数学で結び目の話をするときに４次元の空間を考えることはよくあることなのです。４次元の空間の中でこの結び目に張った膜を見て、膜がどのような特徴を持っているのかを調べます。

簡単な物なら頭の中で考えるだけで済むこともありますが、複雑な物を考えるときは絵を描くなど様々な方法で特徴を調べます。しかし絵に描くとなると、紙（２次元）に立体（３次元）の絵を描くだけでも複雑になることがあるのに、紙（２次元）に４次元の中での膜の様子を描くのはさらに大変です。むしろ描けません。頭の中に思い描いていることのほんの一部だけをピックアップして描くことくらいしか出来ません。

一応描いてみたとしても、描いた絵自体もやはり非常にわかりにくいのです。数ヶ月も経つと自分が書いた絵がなんの絵だったのか分からなくなることもあります。絵の横にその絵の説明を書き残していることもあるのですが、それを読んでも思い出すのに時間がかかってしまうことがよくあります。思い出せないことも。。。

いつも　もやもや　しています。

誰か、頭の中に浮かんでいるイメージをそのままスクリーンに映しだせるアプリを開発してくれないかなぁ。